Spočtěte parciální derivace a obory jejich existence pro

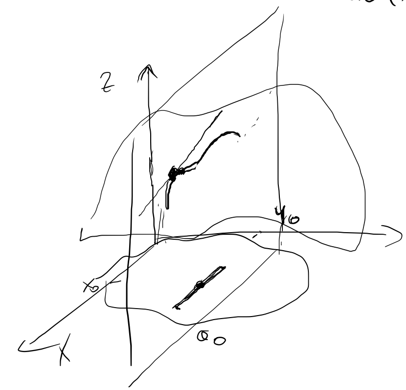
(a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y)$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$,

pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

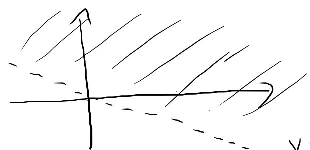
$a_0 = (x_0, y_0)$



a) $f_x = 2xy + \frac{1}{x+2y}$ $\quad f_{xx} = 2y + \frac{-1}{(x+2y)^2}$ $\quad f_{xy} = 2x + \frac{-2}{(x+2y)^2}$

$f_y = x^2 + \frac{2}{x+2y}$ $\quad f_{yx} = 2x + \frac{-2}{(x+2y)^2}$ $\quad f_{yy} = \frac{-4}{(x+2y)^2}$

$D(f) = \{(x,y) : x+2y > 0\}$



$y = -\frac{1}{2}x$

$D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$

b) $f_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y}}$ $\quad f_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$

$D(f) = \{(x,y) : x^2+y \geq 0\}$

$y = -x^2$

$(-3)^x ?\ x \in \mathbb{R}$

Spočtěte parciální derivace a obory jejich existence pro

(c) $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{def.}}{=} e^{\ln\left[(xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}\right]} = e^{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\ln(xy)}$

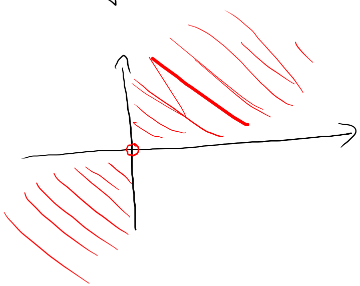
$$\frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} = \frac{1}{x}$$

$$\left[\ln(g(x))\right]' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f_x = e^{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\ln(xy)}\cdot\left[\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\ln(xy) + \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$f_y = e^{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\ln(xy)}\left[\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\ln(xy) + \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y}\right]$$

$$D(f) = \{(x,y) : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\mathbb{R}^2} \quad xy > 0\}$$



$\mathbb{R}^2$

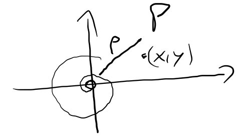
$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \mathbb{R}^2$

$$h_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

2.4 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{f(t,0)}{f(0+t,0)} - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f je spojitá v $(0,0)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$ ano

pd. $\lim\limits_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in(0,2\pi)}} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = 0$ f je sp.

f_x $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \overset{\text{pd.}}{=} \lim\limits_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in(0,2\pi)}} \frac{\cancel{\rho^4}\cos^4\theta + 3\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\,\cancel{\rho^2}\sin^2\theta}{\cancel{\rho^4}}$ nex.

$\neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $df(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

$(1 \times m)$

$n = 2$

$l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$A \in M^{(m,n)}$

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

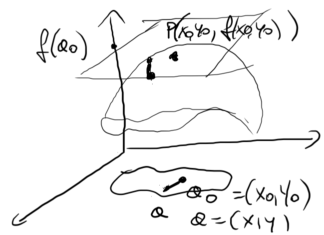
$(\alpha, \beta) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

$$g(a) := f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - g(a)}{\|a - a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - df(a_0)[a - a_0]}{\|a - a_0\|} = 0 \; .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.



$df(a_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$

$g(a) = f(a_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$

$z = f(a_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$

POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $df(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $df(a_0)$ ve standardní bázi má

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \; , \ldots , \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \; .$$

$$\nabla f\big|_{a_0} = \operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{a_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{a_0} \right)$$

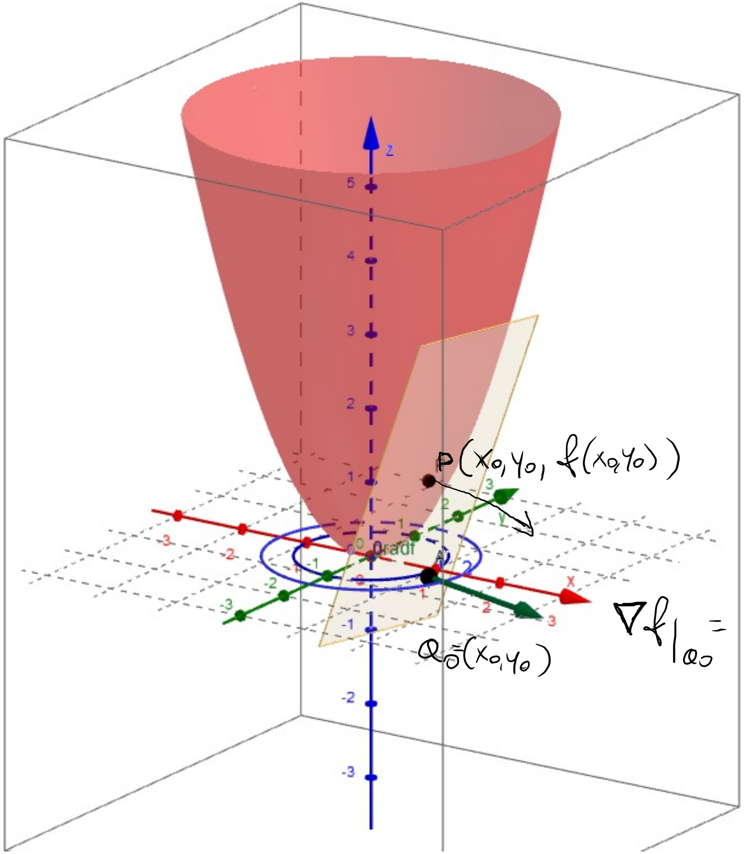
Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

$$\rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0) \cdot [\vec{u}] \; .$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \nabla f\big|_{a_0} \cdot \vec{u}$$



$f(x, y) = x^2 + y^2$

$f_x = 2x$

$f_y = 2y$

$$z = f(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{Q_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{Q_0}(y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{Q_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{Q_0}(y - y_0) - z + f(Q_0) = 0$$

$$\nabla f\big|_{Q_0} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{Q_0}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{Q_0} \right\rangle$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{Q_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{Q_0} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Je funkce f v bodě $(0,0)$ spojitá?

Jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ v bodě $(0,0)$ spojité? ←

Je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná?

$$z = \underbrace{f(a_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)(y-y_0)}_{g(x,y)}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\cancel{yx^2}+y^3-\cancel{x^2y}}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases}\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$a_0=(0,0)$ $\qquad g(x,y) = 0 + 0(x) + 0(y) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} \text{ neex } \left(\underset{\text{pol.}}{=} \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in\langle 0,2\pi)}} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta\,\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} \quad \frac{\text{neex.}}{\neq 0}\right)$$

Najděte gradient funkce f v bodě a a najděte rychlost růstu f v a ve směru vektoru u:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$

(a) $f(x, y) = e^x \sin y, \quad a = (1, \frac{\pi}{4}), \quad u = (-1, 2),$

(b) $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz^3, \quad a = (2, 0, 3), \quad u = (-2, -1, 2).$

a) $f_x = e^x \sin y$

$f_y = e^x \cos y$

2.6 Pro funkci $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ v bodě $a_0 = (2,2)$ určete derivaci, tečnou rovinu a přímku, která je k ní kolmá a prochází bodem ~~$B = (0,-1,3)$~~. $P(2,2,4)$

Ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ má funkce větší růst?

$f(2,2) = 4$

$f_x = y + \cos(x-y)$ $\quad f_x|_{(2,2)} = 2 + 1 = 3$ $\quad \nabla f(2,2) = (3,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_y = x - \cos(x-y)$ $\quad f_y|_{(2,2)} = 2 - 1 = 1$

$df(2,2) = 3(x-2) + 1(y-2) = (3,1)\cdot(x-2, y-2) = (3,1)\cdot\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$g(x,y) = 4 + 3(x-2) + 1(y-2)$

$z = 4 + 3(x-2) + (y-2)$ $\quad 3(x-2) + (y-2) - z + 4 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$p: \ X = P + t\vec{v} \quad t \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

2.7 Pro funkci $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = xy$, která je kolmá na přímku p:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

8. Nalezněte úhel, který v bodě $(1, 0, 0)$ svírají grafy funkcí $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a $g(x, y) = \sin(xy)$.